

Содержание

1	Вероятностная модель	4
2	Условия адекватности модели:	4
3	Парадокс Бертрана	4
4	Вероятностное пространство	4
5	Математическое ожидание (Формулы в дискретном и непрерывном)	5
6	Моральное ожидание	5
7	Квантиль	5
8	Медиана	6
9	Мода (Формулы в дискретном и непрерывном)	7
10	Случайная величина	7
11	Распределением случайной величины ξ	7
12	Функцией распределения	7
13	Дисперсия	8
14	Интерквартильный размах	8
15	Независимость событий	8
16	Независимость совокупности событий	8
17	Случайные величины ξ и η независимы,	8
18	Ковариация	8
19	Коэффициент корреляции	8
20	Коэффициент корреляции Пирсона	9
21	Коэффициент корреляции Кендела	9
22	Коэффициент корреляции Спирмена	9
23	Сходимости	9
24	Центральная предельная теорема	10
25	Неравенство Берри-Эссеена	10

26	Условие Линдеберга	10
27	Теорема Линдеберга-Феллера	11
28	Теорема Ляпунова	11
29	УЗБЧ	11
30	Теорема Пуассона	11
31	Устойчивая функция распределения	12
32	Теорема Леви	12
33	Безгранично делимая ф.р	12
34	Теорема Хинчина	12
35	Информация по Шеннону	12
36	Энтропия	13
37	Дифференциальная энтропия	13
38	Теорема о распределении с наибольшей дифференциальной энтропией	13
39	Случайный процесс	13
40	Распределение случайного процесса	13
41	Процесс с независимыми приращениями	13
42	Однородный процесс	14
43	Пуассоновский процесс	15
44	Информационные свойства пуассоновского процесса	15
45	Случайная сумма	15
46	Свойства случайных сумм:	16
47	Пуассоновские случайные суммы и ЦПТ для них	16
48	Геометрическая случайная сумма	16
49	Характеристическая функция геометрической случайной суммы:	17
50	Теорема Реньи	17
51	Связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами	17

52 Обратная связь	17
53 Теорема переноса	18
54 Аналог теоремы Пуассона для сл.сумм сл. индикаторов	18
55 Теорема переноса для центрированных случ.сумм	19
56 Смесь вероятностных распределений	19
57 Сдвиг-масштабная смесь	19
58 Идентифицируемая смесь	19
59 Неоднородный пуассоновский процесс	20
60 Процесс Кокса	20
61 Обобщенный процесс Кокса	20
62 ЦПТ для обобщенных процессов Кокса	20
63 ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса	21
64 Критерий сходимости одномерного распределения обобщенных процессов Кокса к строго устойчивым законам	22
65 Коэффициент эксцесса (+св-ва)	22
66 Метрика Леви	22
67 Оценка расстояния Леви между чистым нормальным законом и двухкомпонентной смесью нормальных законов через расстояние Леви между двухточечным смешивающим распределением и вырожденным распределением	22

1. Вероятностная модель

- математическая модель реального процесса или явления, содержащего элемент случайности (неустранимой неопределённости)

2. Условия адекватности модели:

1. Наличие случайности (неопределённости)
2. Воспроизводимость с учётом случайности (этот же эксперимент можно воспроизвести в одних и тех же условиях много раз)
3. Устойчивость частот событий $\frac{n(A)}{n} \rightarrow p$

3. Парадокс Бертрона

Какова вероятность того, что длина произвольной хорды внутри окружности превосходит длину стороны правильного вписанного треугольника?

1. $p = \frac{1}{3}$. Фиксируем начало хорды в одной из вершин, она будет длиннее стороны этого треугольника, когда будет его пересекать.
2. $p = \frac{1}{4}$. Случайным образом в круге выберем точку. Она определяет единственную хорду, серединой которой эта точка является. Эта хорда длиннее стороны треугольника, когда её середина лежит во вписанном в правильный треугольник круге.
3. $p = \frac{1}{2}$. Любая из перпендикулярных диаметру хорд, пересекающая его не дальше, чем $R/2$ от центра окружности. Так как в постановке задачи не оговорено Ω , а сказано только «произвольно выбранная». Следовательно, правильный ответ — любое число от 0 до 1

4. Вероятностное пространство

- тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где

Ω - непустое множество - пространство элементарных исходов; $\omega \in \Omega$ - элементарный исход

$\mathcal{A}$ - σ -алгебра подмножеств Ω :

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- 3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\mathbb{P}$ - вероятностная мера $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$

- 1) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- 2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- 3) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} : A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

5. Математическое ожидание (Формулы в дискретном и непрерывном)

Пусть ξ - сл.в., заданная на вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x)$$

- В дискретном случае $\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\xi = x_i)$. Существует только если этот ряд сходится абсолютно.
- В абсолютно непрерывном случае $\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$

Если интеграл $\mathbb{E}(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$ расходится, то говорят, что мат.ожидания не существует.

Свойства:

1. Линейность
2. Единственность
3. Неустойчиво к выбросам
4. Не всегда существует

6. Моральное ожидание

Пусть $\Delta Z = k \frac{\Delta A}{A}$, где A - начальный капитал, $k > 0$ - какой-то коэффициент, Z - выгода от прироста капитала. Взяв дифференциал, получим $Z = k \ln A$. Предположим, что капитал изменится на сл.величину X , тогда $Z = k \ln (X + A)$ - случайна величина, тогда

$$\mathbb{E} k \ln (X + A) = k \ln (M_r + A),$$

где M_r - моральное ожидание.

Для дискретной сл.величины, которая принимает значения ξ_i с вероятностью p_i :

$$M_r = \prod_{i=1}^n (\xi_i + A)^{p_i} - A$$

7. Квантиль

X_q — квантиль распределения

$$F_{\xi}, (q \in (0, 1)) = \begin{cases} \mathbb{P}(\xi < X_q) \leq q \\ \mathbb{P}(\xi \leq X_q) \geq q \end{cases}$$

Если $F_{\xi}(X_q)$ непрерывна в X_q , то квантиль однозначно определяется из уравнения $F_{\xi}(X_q) = q$

8. Медиана

$\text{med } \xi = X_{\frac{1}{2}}$. Медиана всегда существует, устойчива к выбросам, но не всегда единственна. Например, в дискретном случае:

$$\xi = \begin{cases} 0, & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \\ 1, & \mathbb{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

В этом случае, $\text{med } \xi = x, \forall x \in [0, 1]$

9. Мода (Формулы в дискретном и непрерывном)

Мода — наиболее ожидаемое значение случайной величины.

1. Для дискретной случайной величины $\text{mod } \xi = \{x_i \mid \mathbb{P}(\xi = x_i) \geq \mathbb{P}(\xi = x_k), \forall k, k \in \mathcal{N}\}$
2. Для абсолютно непрерывной случайной величины с кусочно-непрерывной плотностью $f_\xi(x) : \text{mod } \xi = \{x \mid f_\xi(x) \geq f_\xi(y) \forall y \in \mathcal{R}\}$ - точка максимума плотности (или локального максимума)

Мода всегда определена, но может быть не единственной.

10. Случайная величина

Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. **Случайной величиной** называется действительная функция элементарного события $\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$, которая обладает свойством измеримости:

$$\xi^{-1}(B) \equiv \{\omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

11. Распределением случайной величины ξ

называется функция $\mathbb{P}_\xi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}$, определенная для любого $B \in \mathcal{B}$ по правилу

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$$

Если случайная величина имеет распределение $\mathbb{P}_\xi$ говорят также, что случайная величина распределена по закону $\mathbb{P}_\xi$.

12. Функцией распределения

случайной величины ξ называется отображение $F_\xi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, определенное по правилу:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x) \text{ or } F_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi((-\infty; x))$$

для всех $\mathcal{R}$.

Свойства:

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$
2. $F_\xi(x)$ не убывает
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$
4. $F_\xi(x)$ непрерывна слева

13. Дисперсия

$$D_{\xi} = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$$

1. Дискретный случай: $D_{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i)^2$

2. Абс. непрерывный случай: $D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx)^2$

Дисперсия характеризует степень разброса случайной величины около ее мат.ожидания.

Свойства:

1. $D_{\xi} \geq 0$, $D_{\xi} = 0 \Leftrightarrow \xi = c$ п.в.

2. $D_{c\xi} = c^2 D_{\xi}$ $D_{a+\xi} = D_{\xi} \quad \forall a, c \in \mathcal{R}$

$\sigma = \sqrt{D_{\xi}}$ - среднеквадратичное отклонение

14. Интерквартильный размах

$IQL = X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}}$, где $X_{\frac{3}{4}}$ - квантиль порядка $\frac{3}{4}$, а $X_{\frac{1}{4}}$ - квантиль порядка $\frac{1}{4}$

15. Независимость событий

События А и В независимы, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

16. Независимость совокупности событий

События $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, если $\forall 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n :$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(A_{i_j})$$

17. Случайные величины ξ и η независимы,

если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} :$

$$\mathbb{P}(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = \mathbb{P}(\xi \in B_1) \mathbb{P}(\eta \in B_2)$$

18. Ковариация

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi \mathbb{E}\eta$$

, она линейна по каждому аргументу

19. Коэффициент корреляции

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D_{\xi}}\sqrt{D_{\eta}}}$$

20. Коэффициент корреляции Пирсона

$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ - НОРСВ

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

21. Коэффициент корреляции Кендела

$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ - НОРСВ.

$(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ - согласованные пары, если $\text{sgn}(x_i - x_j) \text{sgn}(y_i - y_j) = 1$

$$T = \sum_{i < j} \text{sgn}(x_i - x_j) \text{sgn}(y_i - y_j)$$

Коэффициент корреляции Кендела:

$$\tau = \frac{T}{T_{\max}} = \frac{2T}{n(n-1)}, \quad |\tau| \leq 1$$

22. Коэффициент корреляции Спирмена

$(RX_1, \dots, RX_n)$ - распр. X , $(RY_1, \dots, RY_n)$ - распр. Y (НОРСВ)

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n (RX_i - \bar{RX}) (RY_i - \bar{RY})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (RX_i - \bar{RX})^2 \sum_{i=1}^n (RY_i - \bar{RY})^2}} = 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (RX_i - RY_i)^2$$

$$|\gamma| \leq 1$$

23. Сходимости

Пусть $X_1, X_2, \dots$ - случ. величины, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ сходятся к X :

- Почти наверное, с вероятностью 1, если

$$\mathbb{P}(\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

- По вероятности, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозн. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

- В среднем порядка $r > 0$, если

$$\mathbb{E}|X_n - X|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозн. $X_n \xrightarrow{r} X$

- Слабо, если $\forall \varphi(x)$: непрерывной и ограниченной на $\mathcal{R}$:

$$\mathbb{E}\varphi(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\varphi(X)$$

Обозн. $X_n \xrightarrow{\omega} X$

- По распределению, если

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$$

во всех точках непрерывности $F(x)$. Обозн. $X_n \Rightarrow X$ или $X_n \xrightarrow{d} X$

24. Центральная предельная теорема

$X_1, \dots, X_n$ - НОРСВ. $\mathbb{E}X_i = a$, $D X_i = \sigma^2$ ($0 < \sigma^2 < \infty$), $\forall i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x),$$

(равномерно по x)

где $\Phi(x)$ - функция распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

25. Неравенство Берри-Эссеена

$X_1, \dots, X_n$ - НОРСВ. $\mathbb{E}X_i = a$, $D X_i = \sigma^2$ ($0 < \sigma^2 < \infty$). $\exists \mu_3 = \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^3$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 \mu_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

$$0,4 \leq C_0 \leq 0,5$$

Скорость сходимости: $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

26. Условие Линдеберга

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ - нез.сл.в, $\mathbb{E}\xi_i = a_i$, $D \xi_i = \sigma_i^2$, ($0 < \sigma_i^2 < \infty$), $F_i(x)$ - ф.р. ξ_i , $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$,

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - A_n}{B_n} < x\right) \forall t > 0:$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > tB_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Здесь $F_i(x)$ — функция распределения i -й случайной величины.

27. Теорема Линдеберга-Феллера

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ - нез.сл.в, $\mathbb{E}\xi_i = a_i$, $D\xi_i = \sigma_i^2$, $(0 < \sigma^2 < \infty)$, $F_i(x)$ - ф.р. ξ_i и выполнено условие Линдеберга, тогда

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

и справедливо условие равномерной предельной малости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(|\xi_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

28. Теорема Ляпунова

Если $\exists \mathbb{E}|\xi_i - \mathbb{E}\xi_i|^3 = \mu_i^3$, $M_n^3 = \sum_{i=1}^n \mu_i^3$, $\frac{M_n^3}{B_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то справедлива центральная предельная теорема, т.е. $F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x)$ (равномерно по x)

29. УЗБЧ

$X_1, \dots, X_n$ - НОРСВ, определены на одном вероятностном пространстве. $\mathbb{E}X_i = a$, $a < \infty \quad \forall i \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[\text{п.в.}]{} a$

Скорость сходимости: $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при условии существования второго момента $\mu_2 = \mathbb{E}|X_i - \mathbb{E}X_i|^2$

30. Теорема Пуассона

Пусть $\{X_{n,i}\}$ - схема серий,

$$X_{n,i} \sim \begin{cases} 1, & p_n \\ 0, & q_n = 1 - p_n \end{cases}$$

Пусть так же $np_n \rightarrow \lambda > 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}; \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

31. Устойчивая функция распределения

Функция распределения $G(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция $g(t)$ называются устойчивыми, если $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+, \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R} \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$

$$G_1(x) = G(a_1x + b_1), G_2(x) = G(a_2x + b_2)$$

$$G_1 * G_2(x) = G(ax + b)$$

Это условие эквивалентно тому, что для тех же условий: $g(a_1t)g(a_2t) = e^{ibt}g(at)$

Свёртка: $F * G(x) = \int F(x - y)dG(y)$

32. Теорема Леви

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — НОРСВ, определённые на одном вероятностном пространстве. Тогда функция распределения $F(x)$ может быть предельной для сумм вида:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - a_n}{b_n}$$

при некоторых $\{a_n\} \in \mathbb{R}, \{b_n\} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow F(x)$ устойчива.

33. Безгранично делимая ф.р

Функция распределения $F(x)$ и соответствующая ей характеристическая функция $f(t)$ называется безгранично делимой, если $\forall n \in \mathbb{N} \exists f_n(t): f(t) = (f_n(t))^n$, где $f_n(t)$ тоже характеристическая функция некоторой случайной величины. $f(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Соответствующая этой характеристической функции случайная величина также называется безгранично делимой.

34. Теорема Хинчина

Пусть $\{X_{n,i}\}$ - схема серий, $X_{n,i}$ - нез.сл.в. и

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq m_n} \mathbb{P}(|X_{n,j}| > \varepsilon) = 0$$

- условие равномерной предельной малости. Тогда функция распределения $F(x)$ может быть предельной для сумм вида $\sum_{i=1}^{m_n} X_{n,i}$ при $\Leftrightarrow F(x)$ соответствует безгранично делимая характеристическая функция.

35. Информация по Шеннону

Пусть A, B — события, $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$. Информация, содержащаяся в B относительно A ,

$$I(A | B) = \log_a \frac{\mathbb{P}(A | B)}{\mathbb{P}(A)}, a > 1!!$$

При $A = B$: $I(A | B) = \log \frac{1}{\mathbb{P}(A)} = -\log \mathbb{P}(A)$. Свойства информации: 1) Чем больше $\mathbb{P}(A)$, тем меньше $I(A)$. 2) Если A и B независимы, то $I(A | B) = 0$. 3) Если A и B независимы, то $I(AB) = I(A) + I(B)$.

36. Энтропия

- мера неопределённости эксперимента. $Q(E)$ — количество информации, полученное в ходе эксперимента E с n исходами, принимает значения $I(A_i)$ с вероятностью $\mathbb{P}(A_i) = p_i$. Энтропия эксперимента:

$$H(E) = \mathbb{E}Q(E) = \sum_{i=1}^n I(A_i)\mathbb{P}(A_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i,$$

37. Дифференциальная энтропия

$H(\xi) = -\mathbb{E} \log_a p(x)$ $a > 1$, где ξ - абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ - плотность ξ

38. Теорема о распределении с наибольшей дифференциальной энтропией

1. Равномерно распределённая на $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ случайная величина имеет наивысшую энтропию среди всех случайных величин, распределённых на $[-a, a]$.

$$\xi \sim R[-a, a] \Rightarrow \forall \eta: \mathbb{P}(|\eta| \leq a) = 1, H(\xi) \geq H(\eta).$$

2. Показательное распределение с параметром λ имеет наибольшую энтропию среди всех распределений, определённых на полуоси с мат. ожиданием $\frac{1}{\lambda}$

$$\xi \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow \forall \eta: \mathbb{P}(\eta \geq 0) = 1, \mathbb{E}\eta = \frac{1}{\lambda}, (\lambda > 0), H(\xi) \geq H(\eta).$$

3. На всей прямой, среди всех распределений с фиксированными мат. ожиданием и дисперсией, наибольшей энтропией обладает нормальное распределение.

$$\xi \sim N(a, \sigma^2) \Rightarrow \forall \eta: \mathbb{E}\eta = a, \mathbb{D}\eta = \sigma^2 H(\xi) \geq H(\eta).$$

39. Случайный процесс

- семейство сл. величин $X(t, \omega)$, определённых на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\forall t \in T \subset \mathbb{R}$.

При любом фиксированном $\omega_0 \in \Omega$: $X(t, \omega_0)$ — **траектория** случайного процесса.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ — тоже случайный процесс, с дискретным временем.

40. Распределение случайного процесса

— мера $\mathbb{P}_X$: $\forall A \in \Sigma, \mathbb{P}_X(A) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in A\})$

41. Процесс с независимыми приращениями

Случайный процесс $X(t)$ — процесс с независимым приращением, если $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$, случайные величины

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независимы в совокупности.

42. Однородный процесс

Случайный процесс $X(t)$, $\forall t \in T \subset \mathbb{R}$ — однородный, если $\forall t, s, t+h, s+h \in T \Rightarrow X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ имеют одинаковое распределение. $h > 0$

43. Пуассоновский процесс

- процесс $X(t)$ называется однородным пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ (среднее кол-во скачков за ед. времени), если

- $X(t)$ имеет независимое приращение;
- $X(t)$ однородный;
- $X(0) = 0$ почти наверное (с вероятностью 1);
- При $h \downarrow 0, h > 0$:
 1. $\mathbb{P}(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
 2. $\mathbb{P}(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
 3. $\mathbb{P}(X(h) \geq 2) = o(h)$

44. Информационные свойства пуассоновского процесса

Пусть $\tau_1, \dots, \tau_n$ — времена скачков пуассоновского процесса.

1° Время ожидания между скачками пуассоновского процесса имеет показательное распределение.

2° Теорема.

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ на временной оси. $X(b) - X(a) = n$ — число скачков на отрезке $[a, b]$. Условное распределение моментов скачков $\tau_1, \dots, \tau_n, \tau_i \in [a, b] \forall i \in [1; n]$, при условии $X(b) - X(a) = n$ совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения длины n на $[a, b]$

3° Иногда сюда добавляют ЦПТ для пуассоновского процесса.

Пусть $X(t)$ - пуассоновский процесс.

$$\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \xrightarrow{\lambda t \rightarrow \infty} \Phi(x) \sim N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Скорость сходимости: $\Delta(\lambda t) = \left| \mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$, где C_0 — константа из неравенства Берри-Эссеена.

45. Случайная сумма

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — НОРСВ; N — целочисленная неотрицательная случайная величина;

$\xi_1, \dots, \xi_n, N$ определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и независимы.

Случайной суммой S_N называется $S_N(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} \xi_i(\omega)$, где

$F(x)$ — функция распределения ξ_i

$p(x)$ — плотность ξ_i

$f(t)$ — характеристическая функция ξ_i ($f(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$)

$\psi(x)$ — производящая функция N ($\psi(s) = \mathbb{E}s^N, |s| \leq 1$)

$p_n = \mathbb{P}(N = n)$

46. Свойства случайных сумм:

1° $F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$, где F^{*n} — n -кратная свёртка F ; (F^{*0} — функция распределения с единичным скачком в нуле).

$$F^{*n} = \mathbb{P}(S_n < x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i < x\right)$$

2° Если $p_0 > 0$, то $F_{S_N}(x)$ не является абсолютно непрерывной, даже если все ξ_i абсолютно непрерывны.

Если $p_0 = 0$ и существует плотность у ξ_i , то существует плотность $p_{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n p^{*n}(x)$, где $p^{*n}(x)$ — n -кратная свёртка $p(x)$

3° $f_{S_N} = \psi(f(t))$

4° $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N\mathbb{E}\xi_i$; $\mathbb{D}S_N = \mathbb{D}N(\mathbb{E}\xi_i)^2 + \mathbb{E}N\mathbb{D}\xi_i$

47. Пуассоновские случайные суммы и ЦПТ для них

Если $N \sim \Pi(\lambda)$, то $S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$ — пуассоновская случайная сумма.

ЦПТ

Рассмотрим $\xi_1, \dots, \xi_n$ — НОРСВ, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $\mathbb{E}\xi_i = a$ (конечное), $\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2$ (тоже конечная). $N \sim \Pi(\lambda)$; N и ξ_i независимы $\forall \lambda > 0$. Тогда при $S_\lambda = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \xi_i$ выполняется:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

Если $\mathbb{E}|\xi_i|^3 < \infty$, то можно записать неравенство Берри–Эссеена:

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x) \right| < \frac{LC_0}{\sqrt{\lambda}},$$

где

$$L = \frac{\mathbb{E}|\xi_i|^3}{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Здесь C_0 — константа Берри–Эссеена.

48. Геометрическая случайная сумма

Если в случайной сумме S_M число слагаемых M имеет геометрическое распределение $\mathbb{P}(M = n) = p(1-p)^n, n = 0, 1, 2, \dots$, то случайная сумма S_M называется геометрической случайной суммой.

49. Характеристическая функция геометрической случайной суммы:

$$f_{S_N}(t) = \frac{p}{1 - (1-p)f(t)},$$

где $f(t)$ - хар. функция слагаемых.

50. Теорема Реньи

Пусть $G(x)$ — функция распределения стандартного показательного закона. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — НОРСВ, $X_i \stackrel{\text{н.н}}{\geq} 0$ и $a = \mathbb{E}X_i$, $0 < a < \infty, \forall i \in [1; n]$. $S_M = \sum_{i=1}^M X_i$. $M \sim \text{Geom}(p)$.

Тогда

$$\left| \mathbb{P} \left(\frac{p}{a} S_M < x \right) \right| \xrightarrow{p \rightarrow 0} G(x).$$

Если $b^2 = \mathbb{E}X_i^2$, тогда

$$\sup_x \left| P \left(\frac{p}{a} S_M < x \right) - G(x) \right| \leq \frac{pb^2}{(1-p)a^2}$$
$$G(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x}), & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

51. Связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами

Любая геометрическая случайная сумма является пуассоновской случайной суммой.

Пусть S_M - геом. сл. сумма $S_M = X_1 + \dots + X_M$,

$X_1 + \dots + X_M \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$ (имеют одинаковое распределение), где $N \sim \Pi(\log \frac{1}{p})$, случайные величины Y_j независимы и имеют одно и то же распределение $\forall j \in [1; N]$.

$Y_j \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_L$, где L имеет логарифмическое распределение

$$\mathbb{P}(L = k) = \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \frac{(1-p)^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и незав. от $X_1, X_2, \dots$

52. Обратная связь

Пусть S_N — пуассоновская случайная сумма с характеристической функцией $f(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$. Если функция $g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$ является характеристической, то $S_N \stackrel{d}{=} S_M$, где S_M — геометрическая случайная сумма, $S_M = Y_1 + \dots + Y_M$, где случайные величины $M, Y_1, Y_2, \dots$ независимы, причём M имеет геометрическое распределение с $p = e^{-\lambda}$, а $Y_1, Y_2, \dots$ одинаково распределены с общей характеристической функцией $g(t)$.

53. Теорема переноса

Пусть $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}, n = 1, 2, \dots$ - схема серий независимых и одинаково в каждой серии распределенных случайных величин, а $N_n, n = 1, 2, \dots$ - положительные целочисленные случайные величины такие, что при каждом n случайная величина N_n независима от последовательности $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}$. Для натуральных k обозначим $S_{n,k} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$. Предположим, что существует неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_n\}_{n \geq 1}$ и функции распределения $H(x)$ и $A(x)$ такие, что:

$$\mathbb{P}(S_{n,m_n} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x),$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(x),$$

Тогда существует функция распределения $F(x)$ такая, что

$$P(S_{n,N_n} < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x).$$

При этом функция распределения $F(x)$ соответствует характеристической функции

$$f(t) = \int_0^\infty h^u(t) dA(u), t \in R,$$

где $h(t)$ - характеристическая функция, соответствующая функции распределения $H(x)$.

54. Аналог теоремы Пуассона для сл.сумм сл. индикаторов

Рассмотрим семейство последовательностей случайных величин $\{X_{p,j}, j \geq 1, 0 < p < 1\}$ такое, что при каждом фиксированном p случайные величины $X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ имеют одно и то же распределение Бернулли $\mathbb{P}(X_{p,j} = 1) = p, \mathbb{P}(X_{p,j} = 0) = 1 - p$.

Пусть $\{N_p, 0 < p < 1\}$ - семейство положительных целочисленных случайных величин. Предположим, что при каждом фиксированном p случайные величины $N_p, X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ независимы.

Положим $S_p = \sum_{j=1}^{N_p} X_{p,j}$. Предположим, что существует собственная случайная величина N такая, что

$$pN_p \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} N.$$

Тогда

$$S_p \xrightarrow[p \rightarrow 0]{} S,$$

где S - дискретная случайная величина с распределением

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-z} z^k dP(N \leq z), k = 0, 1, 2, \dots$$

55. Теорема переноса для центрированных случ.сумм

Пусть $\{X_{ni}\}$ - схема серий, а $\{a_n\}, \{c_n\}$ - последовательности действительных чисел, m_n - последовательность натуральных чисел. Везде $n \geq 1$. Пусть для некоторых сл.в. Y, U, V , при $n \rightarrow \infty$:

$$S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y; \quad \frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U; \quad a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$S_{n,N_n} - c_n \Rightarrow Z,$$

где Z - случайная величина с характеристической функцией

$$f(t) = \mathbb{E}[h^U(t)e^{itV}], \quad t \in \mathbb{R}$$

56. Смесь вероятностных распределений

$F(x, y)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ при $m \geq 1$, множество Y снабжено σ -алгеброй Σ . Предположим, что при каждом фиксированном y функция $F(x, y)$ является функцией распределения по x , а при каждом фиксированном x функция $F(x, y)$ измерима по y . Пусть G - вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве (Y, Σ) . Функция распределения

$$H(x) = \int_Y F(x, y)G(dy), \quad x \in \mathbb{R}$$

называется смесью функции распределения $F(x, y)$ по y относительно G . Распределение $F(x, y)$ называется смешиваемым, в то время как мера G задает смешивающее распределение.

57. Сдвиг-масштабная смесь

$$H(x) \sim XU + V; \quad H(x) = \mathbb{E}F\left(\frac{x-U}{V}\right),$$

где $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $U > 0$, $V \in \mathbb{R}$; $X, (U, V)$ - независимы

58. Идентифицируемая смесь

$F(x, y)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ при $m \geq 1$, множество Y снабжено σ -алгеброй Σ . Предположим, что при каждом фиксированном y функция $F(x, y)$ является функцией распределения по x , а при каждом фиксированном x функция $F(x, y)$ измерима по y . Пусть $\mathcal{Q}$ - смесь случайных величин на (Y, Σ) . Обозначим

$$\mathcal{H} = \{H(x) : H(x) = \mathbb{E}F(x, Q), \quad x \in \mathbb{R}, \quad Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Семейство $\mathcal{H}$ называется идентифицируемым, если $\forall x \in \mathbb{R}, \forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$:

$$\mathbb{E}F(x, Q_1) = \mathbb{E}F(x, Q_2) \implies Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2.$$

59. Неоднородный пуассоновский процесс

$N^*(t)$:

1. $N^*(0) = 0$ почти наверное;
2. $\mathbb{P}(N^*(t) = k) = \frac{\Lambda^k(t)e^{-\Lambda(t)}}{k!}$;

$\Lambda(t)$ - интенсивность пуассоновского процесса

$\mathbb{P}(N_1(\Lambda(t)) = k) = \mathbb{P}(N^*(t) = k)$, т.е. $N_1(\Lambda(t))$ и $N^*(t)$ стохастически эквивалентны.

60. Процесс Кокса

Пусть $\Lambda(t)$ — случайный процесс:

1. $\Lambda(0) = 0$ почти наверное;
2. $\forall t \in T, \Lambda(t) < \infty$ почти наверное;
3. $\Lambda(t)$ не убывает и имеет непрерывные справа траектории.
4. $\Lambda(t)$ и $N_1(t)$ независимы.

Тогда $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ — дважды стохастический пуассоновский процесс, или процесс Кокса с управляющим процессом $\Lambda(t)$, где $N_1(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 1$ (стандартный)

61. Обобщенный процесс Кокса

Пусть $X_1, X_2, \dots$ - НОРСВ, заданные на одном вероятностном пространстве. $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ — процесс Кокса (дважды стохастический пуассоновский процесс). $N_1(t), X_1, \dots, X_n, \dots$ независимы. Тогда $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ — обобщённый процесс Кокса.

62. ЦПТ для обобщенных процессов Кокса

Пусть $\mathbb{D}X_i = \sigma^2$, $d(t) > 0$ — функция, неограниченно возрастающая при $t \rightarrow \infty$. $S(t)$ - обобщ. процесс Кокса. Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \infty$. Для того, чтобы одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса слабо сходились к распределению некоторой с.в. Z :

$$\frac{S(t)}{\sigma \sqrt{d(t)}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} Z$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что:

$$1. P(Z < x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) d\mathbb{P}(U < y), x \in R$$

$$2. \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} U$$

Следствие:

В условиях теоремы, сформулированной выше

$$\mathbb{P} \left(\frac{S(t)}{\sigma \sqrt{d(t)}} < x \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Phi(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$$

63. ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса

Пусть $\mathbb{E}X_i = a \neq 0$, $S(t)$ — обобщенный процесс Кокса, $\Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \infty$

$$\frac{S(t)}{t} \Rightarrow \mathbb{Z} \iff \exists U : \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow U,$$

причем $\mathbb{Z} = aU$ (по распределению).

64. Критерий сходимости одномерного распределения обобщенных процессов Кокса к строго устойчивым законам

Пусть $G_{\alpha,0}(x)$ - ф.р. строго устойчивого закона. $\Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \infty$. $\mathbb{E}X_i = 0$. $S(t)$ - ОПК. $d(t) > 0$ - неогр. возраст. функция $\alpha \in [0; 2]$.

$$\mathbb{P} \left(\frac{S(t)}{\sigma \sqrt{d(t)}} < x \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} G_{\alpha,0}(x) \iff \mathbb{P} \left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} G_{\frac{\alpha}{2},1}(x)$$

$$G_{\alpha,0}(x) = \int_0^\infty \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right) dG_{\frac{\alpha}{2},1}(y)$$

65. Коэффициент эксцесса (+св-ва)

Острове́ршинность распределения характеризуется коэффициентом эксцесса. Если $EZ^4 < \infty$ то

$$\varkappa(Z) = \frac{\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^4}{\sqrt{\mathbb{D}Z}^4}$$

У норм.распределения $\varkappa(Z) = 3$ - характериз. норм. закон среди всех безгранично делимых распределений.

Свойство:

Пусть $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{P}(\eta > 0) = 1$, $\mathbb{E}\xi^4 < \infty$, $\mathbb{E}\eta^4 < \infty$. Тогда

1. $\varkappa(\xi\eta) \geq \varkappa(\xi)$;
2. $\varkappa(\xi\eta) = \varkappa(\xi) \Leftrightarrow \eta = \text{const}$ почти всюду.

66. Метрика Леви

$F(x)$ - ф.р. с.в. X ; $G(x)$ - ф.р. с.в. Y

$L(X, Y) = \inf \{h > 0 : G(x - h) - h \leq F(x) \leq G(x + h) + h\} \forall x \in \mathbb{R}$ - метрика Леви.

67. Оценка расстояния Леви между чистым нормальным законом и двухкомпонентной смесью нормальных законов через расстояние Леви между двухточечным смешивающим распределением и вырожденным распределением

Пусть $p \in [0; 1]$, $|a| < 1$ и $L(\Phi, G_{p,a}) < \varepsilon$. Тогда

$$L(0, V_{p,a}) \leq c \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \text{ где } c = (\sqrt{e}(1 + \sqrt{2\pi}))^{\frac{1}{2}}$$

$$V_{p,a} = \begin{cases} 0, & p \\ a, & 1 - p \end{cases}$$

$G_{p,a}$ - сдвиговая смесь.